Test di Matematica (A)

Scienze Agrarie 26/04/2022

1) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2-x+20}{x^2-7x+12}\right) .$$

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{\log(x^2+3)}{e^x} \,,$$

determinare gli eventuali asintoti per $x \to +\infty$.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) \;=\; \sqrt{x^2-1} + \log(x+2)$$

e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare l'integrale

$$\int x \,\log(x+1)\, dx \,.$$

Soluzione

1) L'argomento dell'arcotangente ha limite uguale a 1 per $x \to +\infty$ essendo il rapporto di due polinomi dello stesso grado con i coefficienti di x^2 uguali tra loro. Segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2 - x + 20}{x^2 - 7x + 12}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} .$$

2) Si calcola il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+3)}{e^x} = 0 .$$

Si deduce che la funzione, per $x \to +\infty$, ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risultano verificate le condizioni $x^2 - 1 \geq 0$ e $x + 2 > 0$. Si ha quindi

$$D =]-2, -1] \cup [1, +\infty[.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+2} .$$

4) Applicando, inizialmente, la formula di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned}
\int x \log(x+1)\, dx &= \frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\left[\int \frac{x^2-1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx\right] \\
&= \frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\left[\int (x-1)dx + \log(x+1)\right] \\
&= \frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \log(x+1) + C \\
&= \log(x+1)\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C
\end{aligned}$$